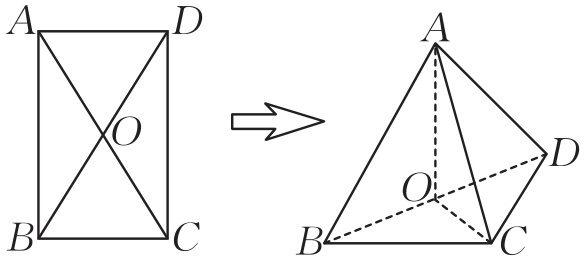
## **培优课15 立体几何中的动态问题**

### **培优点一 动态中的位置关系判断**

#### **审题指导**

典例1 [2024·海南模拟]（多选题）如图，在矩形中，,,和交于点，将沿直线翻折，则下列说法正确的是( ABC ).



**解题观摩**

A. 存在，（审题①考虑证明平面推出线线垂直）

B. 存在，且（审题②考虑证明平面推出线线垂直）

C. 存在，且（审题③考虑的位置对应的值）

D. 存在，且（审题④考虑反证法推出矛盾）

[解析]对于，当时，此时矩形为正方形，则，将沿直线翻折，若使得平面 平面时, 由， 平面，平面 平面，，…………审题①

又 平面,所以，故正确. 对于，当时，,则，，且， 平面, 平面,，又 平面，所以，故正确.…………审题②

对于，在矩形中，,，所以将沿直线翻折时，总有，取，当将沿直线翻折到时，，…………审题③

即，且， 平面, 平面，则此时满足 平面，故正确. 对于，假设在翻折过程中存在某个位置，使得 平面，且 平面，所以，所以在中，为斜边，,故不正确.…………审题④

故选.

#### **通性通法**

**解决空间位置关系的动点问题的方法**

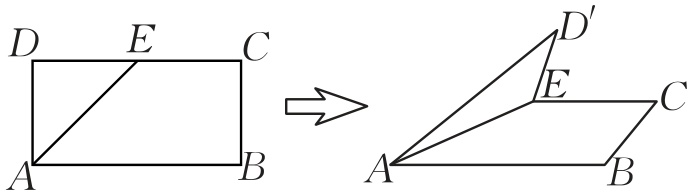
1.应用“位置关系定理”转化.

2.建立“坐标系”计算.

#### **培优训练**

##### **由二面角确定位置关系条件变式**

1. 如图，在矩形中，，，为边的中点，沿将折起至，设二面角的大小为 ，直线与平面所成的角为 ，若 ，则在翻折过程中( D ).



A. 存在某个位置，使得 B. 存在某个位置，使得

C. D.

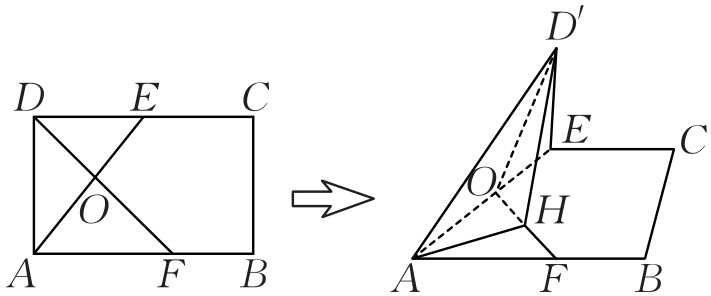
[解析]如图，作于点,连接,过点作，垂足为,因为,,,, 平面,所以 平面,

因为,，,, 平面，

所以 平面，所以 ， ，

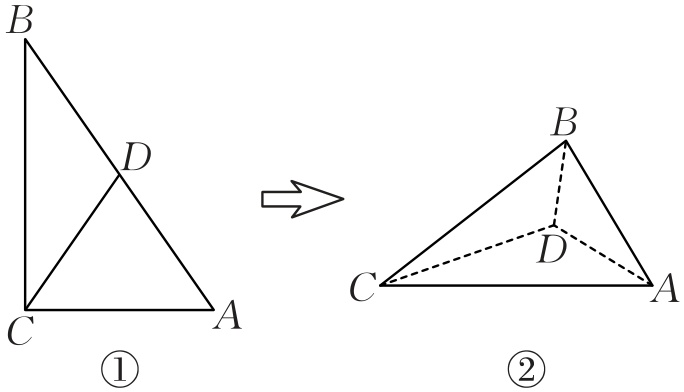
，所以 ，

因为 ， ，所以，所以 .故选.



##### **由确定的位置关系求取值范围设问变式**

2. 如图，在中，，，是斜边的中点，将沿直线翻折，若在翻折过程中存在某个位置，使得，则的取值范围是( A ).



A. B. , C. D.

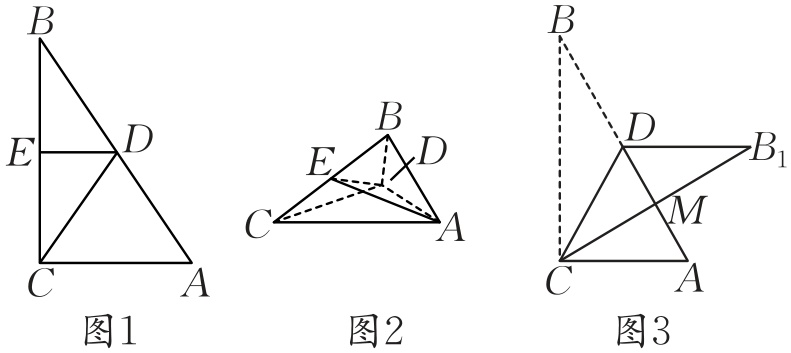
[解析]取的中点，连接，翻折前如图1，则，又，所以.翻折后，在图2中，当时，连接，由题意可得，所以 平面，所以，又为的中点，所以，所以.在中，有，，

即，，其中，解得，

如图3，当翻折到与在一个平面内时，若，则与相交，交点为，即 .因为，所以.

又，即 ，所以 ，所以 .

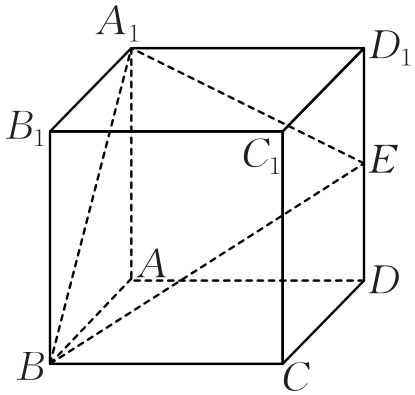
在中，，即.综上可得.故选.



### **培优点二 动态中的轨迹问题**

#### **审题指导**

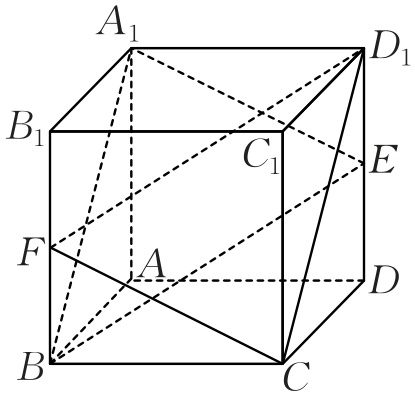
典例2 [2024·黑龙江校考]如图，正方体的棱长为1，（审题①找另一线段的中点），是正方形所在平面内一动点，（审题②找到平面与平面平行），则（审题③点的轨迹是固定线段）为.



**解题观摩**

[解析]如图，，…………审题①

因为,，所以四边形为平行四边形，所以，又 平面， 平面，所以平面.因为是的中点，为的中点，



所以，，又,，所以,，所以四边形为平行四边形，所以，又 平面， 平面，所以平面.又，, 平面,.…………审题②

当点在平面上时， 平面,所以平面，又点轨迹在正方形内，平面与正方形交于线段,，…………审题③

所以.

#### **通性通法**

**解决与几何体有关的动点轨迹问题的方法**

1.几何法：根据平面的性质进行判定.

2.定义法：转化为平面轨迹问题，用圆锥曲线的定义判定，或用代替法进行计算.

3.特殊值法：根据空间图形线段长度关系取特殊值或特殊位置进行排除.

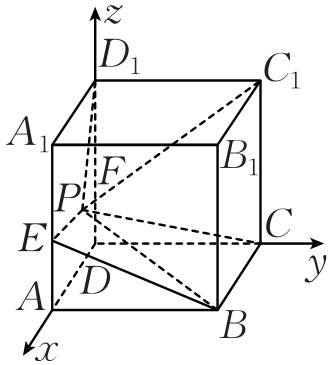
#### **培优训练**

##### **动点轨迹形状问题设问变式**

1. 在正方体中，已知为正方形中的一个动点，且点满足直线与平面所成的角的大小等于平面与平面所成锐二面角的大小，则点的轨迹为( D ).

A. 直线 B. 椭圆 C. 圆 D. 抛物线

[解析]如图，以为原点，,,分别为,,轴建立空间直角坐标系，不妨设，其它各点相应坐标略，



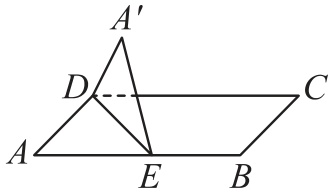
设，,，过点作分别交,于点,，连接,，由在平面内，可证是直线与平面所成的角，是平面与平面所成锐二面角的平面角，

由题意，即，

得，化简得，它的轨迹是抛物线.故选.

##### **翻转过程中的空间动点轨迹问题条件变式**

2. 如图，在矩形中，,，为的中点，将沿折起至，记二面角 ，当 在上变化时，点的轨迹长度为.



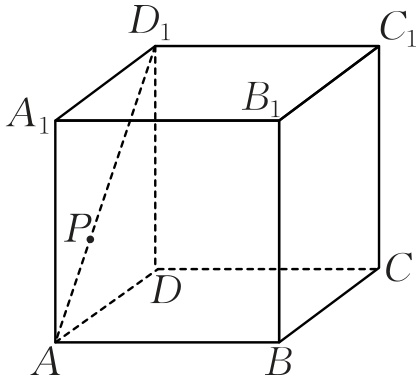
[解析]取的中点，连接,（图略），则，故点在以为球心，为半径的球面上.过点作，垂足为，连接，则.在矩形中，,，故，故，而，故 平面，故点在过点且垂直于的平面上，所以点在以为圆心，为半径的圆上，而为二面角的平面角或补角，故 ，故点的轨迹长度为.

### **培优点三 动态中的定值问题**

#### **审题指导**

典例3 [2024·安徽校考]（多选题）如图，在棱长为1的正方体中，是线段上的动点，则下列说法正确的是( AB ).

**解题观摩**



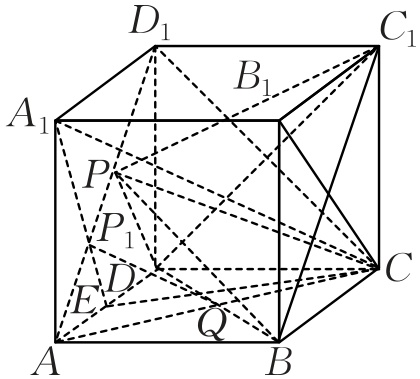
A. 异面（审题①判断这两异面直线的空间位置是固定的）

B. （审题②点到平面距离和三角形面积都为定值）

C. 直线（审题③判断到平面距离和比值不为定值）

D. 若点是线段上动点，则（审题④找到特殊点,判断平行的可能性）

[解析]如图，在棱长为1的正方体中，连接，，，对角面是矩形， 平面， 平面，则，而，，, 平面，于是 平面，又 平面，，…………审题①



即异面直线与所成角的大小为定值，正确； 连接,,,,由四边形是矩形，得，而 平面， 平面，则平面，即点到平面的距离为定值，，…………审题②

因此为定值，正确； 连接,,,在中，，则边上的高为，有，由 平面，知点到平面的距离为，令直线和平面所成的角为 ，则，…………审题③

不是定值，错误； 取的中点，连接，交于点，连接，交于点，连接，显然，，…………审题④

则当与重合时，有，错误. 故选.

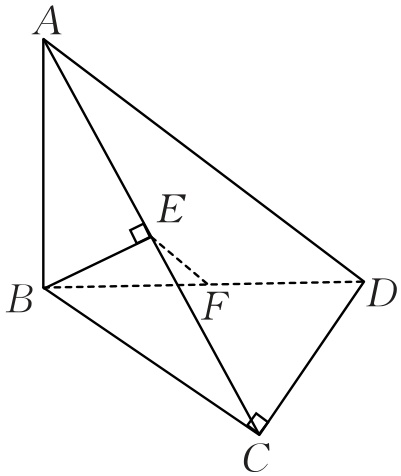
#### **通性通法**

动态立体几何问题，在变化过程中总蕴含着某些不变的因素，因此要认真分析其变化特点，寻找不变的静态因素，从静态因素中，找到解决问题的突破口.

#### **培优训练**

##### **由定值推出定值设问变式**

1. （多选题）如图，在三棱锥中， 平面,,,为垂足，为的中点，则下列结论正确的是( BCD ).



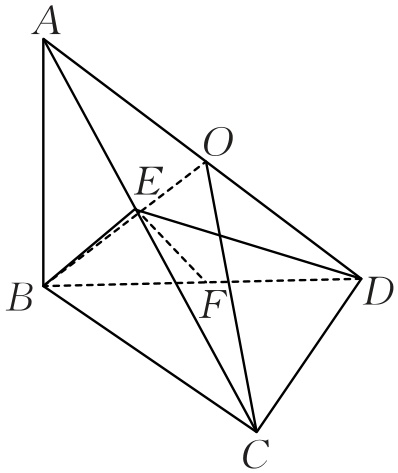
A. 若的长为定值，则该三棱锥外接球的半径也为定值

B. 若的长为定值，则该三棱锥外接球的半径也为定值

C. 若的长为定值，则的长也为定值

D. 若的长为定值，则的值也为定值

[解析]如图，取的中点，连接,,



平面， 平面，

，

, 平面， 平面，，

，,, 平面， 平面，

平面，，

，则，

为外接球的球心，是外接球的直径，

该三棱锥外接球的半径为，故正确；

由以上分析可知，,当的长为定值时,的长是可变化的，不能推得为定值，

故当的长为定值时，该三棱锥外接球的半径不一定为定值，

故错误；

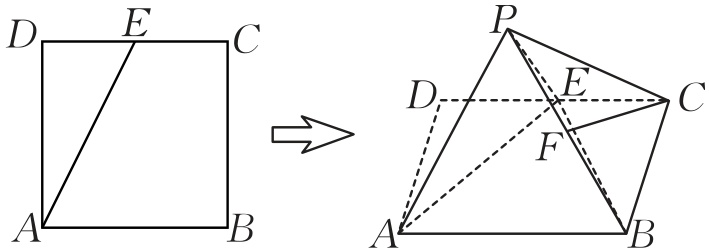
由的分析可知 平面, 平面,故，又，,, 平面， 平面， 平面，，，若的长为定值，则的长也为定值，故正确；

由以上分析可知，，故，,

由于为的中点，故，若的长为定值，则的值也为定值，故正确.故选.

##### **与翻折问题结合条件变式**

2. （多选题）如图，在边长为2的正方形中，是的中点，将沿翻折到的位置，是线段的中点，在翻折到的过程中，下列说法正确的是( BCD ).



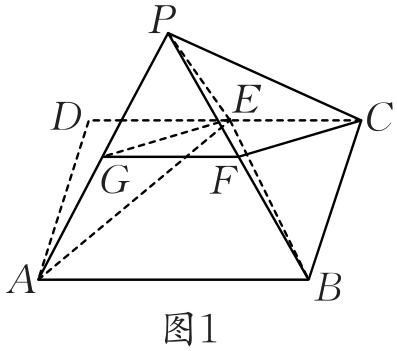
A. 存在某个位置，使得

B. 的长度为定值

C. 四棱锥的体积的最大值为

D. 直线与平面所成角的正切值的最大值为

[解析]因为，假设，又，, 平面，



所以 平面，又 平面，所以.

在中，，所以与不可能垂直，故错误；

取的中点，连接，，如图1所示，因为是线段的中点，是的中点，

所以，，又，，所以，，

所以四边形是平行四边形，所以，故正确；

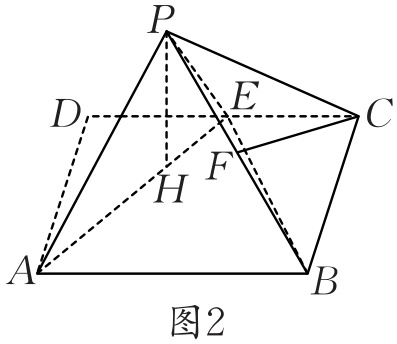
当平面 平面时，四棱锥的体积最大，

过作的垂线，垂足为，如图2，所以，，，，

所以，

因为平面 平面，平面 平面，， 平面，

所以 平面，即是四棱锥的高，



所以，故正确；

当平面 平面时，直线与平面所成角的正切值取得最大值，

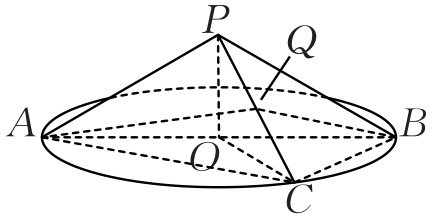
此时，所以，故正确.

故选.

### **培优点四 动态中的最值（范围）问题**

#### **审题指导**

典例4 （多选题）如图，在圆锥中，已知圆的直径，是底面圆上异于的动点，圆锥的侧面展开图是圆心角为 的扇形.若，则( CD ).



**解题观摩**

A. （审题①的面积用一个量表示）

B. （审题②找到特殊位置,\此数量积与无关）

C. （审题③找到合适的底面,将此体积表示出来）

D. 若，错误字符差异（审题④在图中找到,并在三角形中表示）

[解析]设圆锥的母线长为，由，得，而圆锥底面圆半径，

所以圆锥的高，故 ， ，

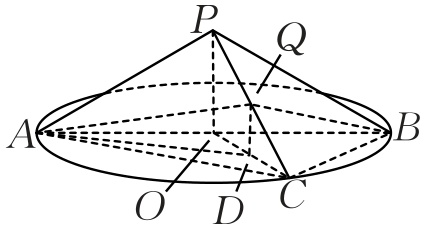
，…………审题①

当且仅当时取等号，错误；

，…………审题②

所以的值与 的取值无关，错误； 如图，过点作交于点，由 平面，得 平面，由，得 ，于是，…………审题③

所以当且仅当，且为的中点时，三棱锥的体积取得最大值，最大值为，正确；



若，则 , ，由选项知，为与圆锥底面所成的角，即，…………审题④

显然，在中，，

，而，

所以，正确.故选.

#### **通性通法**

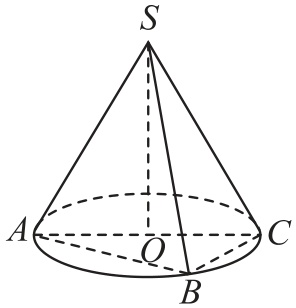
空间几何体中的某些对象，如点、线、面，在约束条件下运动，带动相关的线段长度、几何体体积等发生变化，进而就有了面积、体积及角度的最值问题.

|  |  |
| --- | --- |
| 定性分析 | 在空间几何体的变化过程中，通过观察运动点的位置变化，确定其相关量的变化规律，进而发现相关面积或体积等的变化规律，求得其最大值或最小值 |
| 定量分析 | 将所求问题转化为某一个相关量的问题，即转化为关于其中一个量的函数，求其最大值或最小值的问题.根据具体情况，有函数法、不等式法、三角函数法等多种方法可供选择 |

#### **培优训练**

##### **球体上动点变为圆锥上的动点条件变式**

1. [2024·济宁模拟]（多选题）如图，为圆锥底面圆的直径，是圆上异于，的动点，，则下列结论正确的是( BD ).



A. 圆锥的侧面积为

B. 三棱锥体积的最大值为

C. 的取值范围是

D. 若，为线段上的动点，则的最小值为

[解析]在中，，

则圆锥的母线长，半径，

对于选项，圆锥的侧面积为 ，故选项错误；

对于选项，当时，的面积最大，此时，则三棱锥体积的最大值为，故选项正确；

对于选项，当点与点重合时，为最小角，当点与点重合时，，达到最大值，

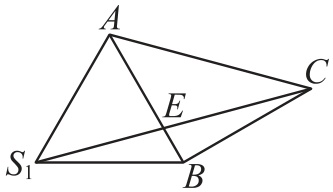
又因为点与点，不重合，则，又 ，可得，故选项错误；

对于选项，由，，，

得，又，则为等边三角形，则，

将以为轴旋转到与共面，得到，

则为等边三角形，，



如图所示，则，

因为，

，

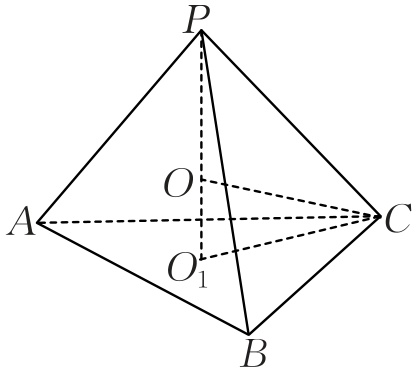
，则，故选项正确.故选.

##### **动点变为动几何体条件变式**

2. [2024·新疆模拟]若棱长为6的正方体内有一个棱长为的正四面体，且该正四面体可以在正方体内任意转动，则的最大值为( C ).

A. B. 3 C. D.

[解析]由题意知，当正四面体在正方体的内切球内，正四面体可以在正方体内任意转动，故该正四面体内接于球时，其棱长最长，



因为正方体的棱长为6，所以其内切球的半径为3，

设正四面体为，为底面的中心，正四面体外接球的球心为，连接，，，如图所示，则 平面,则，，

又，所以在中，，解得.故选.